गणित (प्रश्न-पत्र–II)

समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें)

दो खण्डों में कुल **आठ** प्रश्न दिए गए हैं जो **हिन्दी** एवं **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं।

उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के प्रयासों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा न गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिए।

MATHEMATICS (PAPER–II)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. (a) मान लीजिए G सभी 2×2 के वास्तविक आव्यूहों $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ का समुच्चय है, जहाँ कि $xz \neq 0$. दर्शाइए कि G आव्यूह गुणन के अन्तर्गत एक समूह है। मान लीजिए N उपसमुच्चय $\left\{\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$ को द्योतित करता है। क्या N समूह G का सामान्य (नॉर्मल) उपसमूह है? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए।

Let G be the set of all real 2×2 matrices $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$, where $xz \neq 0$. Show that G is a group under matrix multiplication. Let N denote the subset $\left\{\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$. Is N a normal subgroup of G? Justify your answer. 10

(b) अनंत समाकल $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the improper integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$. 10

(c) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = u + iv$, जहाँ

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2}, \; z \neq 0; \; f(0) = 0$$

मूलबिन्दु पर कौशी-रीमान समीकरणों को सन्तुष्ट करता है, परन्तु $z = 0$ पर f के अवकलज का अस्तित्व नहीं है।

Prove that the function $f(z) = u + iv$, where

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2}, \; z \neq 0; \; f(0) = 0$$

satisfies Cauchy-Riemann equations at the origin, but the derivative of f at $z = 0$ does not exist. 10

(d) फलन $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ का $z = 0$ तथा $z = 1$ के इर्द-गिर्द लौराँ श्रेणी में प्रसार कीजिए।

Expand in Laurent series the function $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ about $z = 0$ and $z = 1$. 10

(e) आलेखीय (ग्राफीय) विधि के द्वारा हल कीजिए :

अधिकतमीकृत कीजिए $Z = 6x_1 + 5x_2$

बशर्ते कि

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 16 \\ x_1 + x_2 &\le 11 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 6 \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 90 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Solve graphically :

Maximize $Z = 6x_1 + 5x_2$

subject to

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 16 \\ x_1 + x_2 &\le 11 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 6 \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 90 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

10

2. *(a)* दर्शाइए कि $\mathbb{Z}_7$ एक क्षेत्र है। तब $\mathbb{Z}_7$ में $([5] + [6])^{-1}$ तथा $(-[4])^{-1}$ ज्ञात कीजिए।

Show that $\mathbb{Z}_7$ is a field. Then find $([5] + [6])^{-1}$ and $(-[4])^{-1}$ in $\mathbb{Z}_7$. 15

(b) $\int_0^1 f(x)\, dx$ का समाकलन कीजिए, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , \quad x \in]0, 1] \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Integrate $\int_0^1 f(x)\, dx$, where

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , \quad x \in]0, 1] \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

15

(c) निम्नलिखित परिवहन समस्या के लिए वोगेल की सन्निकटन विधि के द्वारा आरंभिक आधारिक साध्य हल ज्ञात कीजिए। इसका इष्टतम हल तथा न्यूनतम परिवहन लागत भी ज्ञात कीजिए :

गन्तव्य

		D_1	D_2	D_3	D_4	*उपलब्धता*
उद्गम	O_1	6	4	1	5	14
	O_2	8	9	2	7	16
	O_3	4	3	6	2	5
	माँग	6	10	15	4	

Find the initial basic feasible solution to the following transportation problem by Vogel's approximation method. Also, find its optimal solution and the minimum transportation cost :

Destinations

		D_1	D_2	D_3	D_4	*Supply*
Origins	O_1	6	4	1	5	14
	O_2	8	9	2	7	16
	O_3	4	3	6	2	5
	Demand	6	10	15	4	

20

3. (a) दर्शाइए कि समुच्चय $\{a + b\omega : \omega^3 = 1\}$, जहाँ a तथा b वास्तविक संख्याएँ हैं, सामान्य योग तथा गुणन के अन्तर्गत एक क्षेत्र है।

Show that the set $\{a + b\omega : \omega^3 = 1\}$, where a and b are real numbers, is a field with respect to usual addition and multiplication. 15

(b) फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(3x^2 - 2y^2)}{x^2 + y^2} & , \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के लिए $\dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}$ तथा $\dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}$ ज्ञात कीजिए। इसके साथ, बिन्दु (0, 0) पर $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ तथा $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ के सांतत्य की भी विवेचना कीजिए।

Obtain $\dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}$ and $\dfrac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}$ for the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(3x^2 - 2y^2)}{x^2 + y^2} & , \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Also, discuss the continuity of $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ and $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ at (0, 0). 15

(c) अवशेषों का इस्तेमाल करते हुए समाकल $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2}$ का मान निकालिए।

Evaluate the integral $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2}$ using residues. 20

4. (a) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ तत्समक सहित एक क्रमविनिमेय वलय है।

Prove that the set $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ is a commutative ring with identity. 15

(b) लग्रांज गुणकों की विधि के द्वारा $x^2 + y^2 + z^2$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए बशर्ते कि $xyz = a^3$.

Find the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$ subject to the condition $xyz = a^3$ by the method of Lagrange multipliers. 15

(c) एकधा विधि के द्वारा निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या के सभी इष्टतम हल ज्ञात कीजिए :

अधिकतमीकृत कीजिए $Z = 30x_1 + 24x_2$

बशर्ते कि

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &\le 200 \\ x_1 &\le 32 \\ x_2 &\le 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Find all optimal solutions of the following linear programming problem by the simplex method :

Maximize $Z = 30x_1 + 24x_2$

subject to

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &\le 200 \\ x_1 &\le 32 \\ x_2 &\le 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

20

खण्ड—B / SECTION—B

5. *(a)* आंशिक अवकल समीकरण $(2D^2 - 5DD' + 2D'^2)\, z = 24(y - x)$ को हल कीजिए।

Solve the partial differential equation $(2D^2 - 5DD' + 2D'^2)\, z = 24(y - x)$. 10

(b) समीकरण $\cos x - xe^x = 0$ का, चार दशमलव स्थानों तक सही, मूल ज्ञात करने के लिए न्यूटन-रैफसन विधि का इस्तेमाल कीजिए।

Apply Newton-Raphson method to determine a root of the equation $\cos x - xe^x = 0$ correct up to four decimal places. 10

(c) समलंबी नियम के द्वारा $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का समाकलन करने के लिए पाँच उपांतरालों का इस्तेमाल कीजिए।

Use five subintervals to integrate $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ using trapezoidal rule. 10

(d) केवल AND तथा OR तर्कसंगत द्वार इस्तेमाल करते हुए बूलीय व्यंजक $z = xy + uv$ के लिए एक तर्क परिपथ की रचना कीजिए।

Use only AND and OR logic gates to construct a logic circuit for the Boolean expression $z = xy + uv$. 10

(e) हैमिल्टन के समीकरणों का इस्तेमाल करते हुए असरल लोलक की गति का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of motion of a compound pendulum using Hamilton's equations. 10

6. *(a)* समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ को विहित रूप में समानीत कीजिए।

Reduce the equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ to canonical form. 15

(b) गाउस-साइडल पुनरावृत्ति विधि के द्वारा समीकरण निकाय

$$2x_1 - x_2 = 7$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$
$$-x_2 + 2x_3 = 1$$

का हल कीजिए (तीन पुनरावृत्तियाँ कीजिए)।

Solve the system of equations

$$2x_1 - x_2 = 7$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$
$$-x_2 + 2x_3 = 1$$

using Gauss-Seidel iteration method (Perform three iterations). 15

(c) $x = 0 \cdot 8$ पर y का मान ज्ञात करने के लिए, जहाँ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+y}$, $y(0 \cdot 4) = 0 \cdot 41$ चतुष्कोटि के रुन्गे-कुट्टा फॉर्म्यूले का इस्तेमाल कीजिए। पग लंबाई $h = 0 \cdot 2$ लीजिए।

Use Runge-Kutta formula of fourth order to find the value of y at $x = 0 \cdot 8$, where $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+y}$, $y(0 \cdot 4) = 0 \cdot 41$. Take the step length $h = 0 \cdot 2$. 20

7. *(a)* एक कंपमान डोरी (लम्बाई $= \pi$, स्थिर सिरे, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$) का विक्षेप ज्ञात कीजिए, यदि प्रारंभिक वेग शून्य हो और प्रारंभिक विक्षेप $f(x) = k(\sin x - \sin 2x)$ हो।

Find the deflection of a vibrating string (length $= \pi$, ends fixed, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$) corresponding to zero initial velocity and initial deflection

$$f(x) = k(\sin x - \sin 2x)$$

15

(b) सिम्प्सन के एक-तिहाई नियम के लिए एक प्रवाह-चार्ट बनाइए।

Draw a flowchart for Simpson's one-third rule. 15

(c) दत्त वेग विभव $\phi = \frac{1}{2} \log \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right]$ के लिए प्रवाह-रेखाएँ ज्ञात कीजिए।

Given the velocity potential $\phi = \frac{1}{2} \log \left[\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right]$, determine the streamlines. 20

8. *(a)* हल कीजिए $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < 1$, $t > 0$, दिया है कि

(i) $u(x, 0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x^2, \quad 0 \le x \le 1$

(iii) $u(0, t) = u(1, t) = 0$, सभी t के लिए

Solve $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < 1$, $t > 0$, given that

(i) $u(x, 0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x^2, \quad 0 \le x \le 1$

(iii) $u(0, t) = u(1, t) = 0$, for all t 15

(b) किसी भी बूलीय चर x और y के लिए दर्शाइए कि $x + xy = x$.

For any Boolean variables x and y, show that $x + xy = x$. 15

(c) दो अनंत समांतर प्लेटों के बीच, एक श्यान असंपीड्य तरल के अपरिवर्ती स्तरीय (लैमिनर) प्रवाह के लिए, नैवियर-स्टोक्स समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find Navier-Stokes equation for a steady laminar flow of a viscous incompressible fluid between two infinite parallel plates. 20

★ ★ ★